AY2025 Spring GCI199-1 Independent Study in GC Program
“Set Theory and Topology”
On Cantor’s Theorem and Cantor’s Diagonal Argument
(カントールの定理とカントールの対角線論法について)

Cantor’s Theorem
For any set X,

$$|X| < |2^X|.$$

The general proof for the part of the theorem,

$$\text{there is no injection from } 2^X \text{ to } X, \tag{1}$$

is as follows.

[**Proof of** (1)]

$$\text{Assume there exists an injection} \quad f : 2^X \to X. \tag{2}$$

Define a set $A \in 2^X$ (i.e. $A \subset X$) by

$$A = \{ f(U) \,|\, U \in 2^X,\ f(U) \notin U \} \tag{3}$$

1. The case $f(A) \notin A$.

   By definition of A, $f(A)$ satisfies the condition to be an element in A. Thus,

   $$f(A) \in A.$$

   This is a contradiction.

2. The case $f(A) \in A$.

   By definition of A, there exists $U \in 2^X$ such that

   $$f(A) = f(U), \quad \text{and} \quad f(U) \notin U.$$

Since f is injective, $A = U$, and hence

$$f(A) \notin A.$$

This is a contradiction.

This proof is literally Cantor's diagonal argument itself, and it generalizes the "visualized by a concrete example" form of the diagonal argument used to prove the famous result

$$\textbf{bijection} \quad f: \quad \mathbb{N} \to [0,1] \quad \text{does not exist.}$$

Below, assume a bijection

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

exists, and observe how the general proof above corresponds to the "visualized by a concrete example" form of Cantor's diagonal argument (we are not proving anything here; we are merely examining the correspondence).

As a concrete example, suppose f is the following mapping (with $i = f(U_i)$, $i \in \mathbb{N}$, $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$). In the figure below, the element of $\mathbb{N}$ appears on the left of each arrow and the element of $2^{\mathbb{N}}$ on the right. On the far right, we use the usual binary-indicator notation: the nth digit is 1 if $n \in U_i$, and 0 otherwise:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
i \in \mathbb{N} & & U_i \in 2^{\mathbb{N}} & & 0 \in U_i & 1 \in U_i & 2 \in U_i & 3 \in U_i & 4 \in U_i & \cdots \\
0 & \leftarrow\!\shortmid & U_0 = \{\quad 1, 2, \quad 4, \ldots\} & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & \leftarrow\!\shortmid & U_1 = \{0, 1, \quad 3, 4, \ldots\} & = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
2 & \leftarrow\!\shortmid & U_2 = \{0, \qquad 3, 4, \ldots\} & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
3 & \leftarrow\!\shortmid & U_3 = \{\quad 1, 2, \quad 4, \ldots\} & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
4 & \leftarrow\!\shortmid & U_4 = \{0, \quad 2, 3, 4, \ldots\} & = & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

For this specific case, the set $A \in 2^{\mathbb{N}}$ defined by Definition (3) is exactly the collection of those natural numbers $i = f(U_i)$ (with $i \in \mathbb{N}$) for which $i = f(U_i) \notin U_i$. Equivalently, it consists of all the entries on the left whose ith digit in the binary-indicator notation is 0 (the ones shown in blue):

$$
\begin{array}{cccccccccc}
i \in \mathbb{N} & & U_i \in 2^{\mathbb{N}} & & 0 \in U_i & 1 \in U_i & 2 \in U_i & 3 \in U_i & 4 \in U_i & \cdots \\
\color{blue}{0} & \leftarrow\!\shortmid & U_0 = \{\ \ 1, 2, \ \ 4, \ldots\} & = & \color{blue}{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & \leftarrow\!\shortmid & U_1 = \{0, 1, \ \ 3, 4, \ldots\} & = & 1 & \color{green}{1} & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\color{blue}{2} & \leftarrow\!\shortmid & U_2 = \{0, \ \ \ \ 3, 4, \ldots\} & = & 1 & 0 & \color{blue}{0} & 1 & 1 & \cdots \\
\color{blue}{3} & \leftarrow\!\shortmid & U_3 = \{\ \ 1, 2, \ \ 4, \ldots\} & = & 0 & 1 & 1 & \color{blue}{0} & 1 & \cdots \\
4 & \leftarrow\!\shortmid & U_4 = \{0, \ \ 2, 3, 4, \ldots\} & = & 1 & 0 & 1 & 1 & \color{green}{1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 & & & & & & & & & \\
 & & A = \{\color{blue}{0}, \ \ \color{blue}{2}, \color{blue}{3}, \ \ \ldots\} & = & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \cdots \\
 & & & & A \neq U_0 & A \neq U_1 & A \neq U_2 & A \neq U_3 & A \neq U_4 & \cdots \\
 & & & & (\because 0 \in A) & (\because 1 \notin A) & (\because 2 \in A) & (\because 3 \in A) & (\because 4 \notin A) & \cdots
\end{array}
$$

Therefore, although $A \in 2^{\mathbb{N}}$, we have

$$A \neq U_i \quad \text{for every } i \in \mathbb{N},$$

and hence no bijection f can exist. In constructing A, one can visually see that we are building the element of $2^{\mathbb{N}}$ corresponding to the real in $[0, 1]$ whose binary digits along the diagonal have been flipped (from 0 to 1 or vice versa). However, when one actually identifies this with a real number, one must remember that positional representations are not unique (for example, in decimal $1 = 0.999999\ldots$, and in binary $1 = 0.111111\ldots$.)

(同内容の日本語版を次頁から示す)

カントールの定理
任意の集合 X について

$$|X| < \left|2^X\right|.$$

この一部である,

$$2^X \text{ から} X \text{への単射は存在しない.} \tag{4}$$

の一般的な証明は以下の通りである.

[(4) **の証明**]

$$\text{単射} \quad f : 2^X \to X \quad \text{が存在すると仮定する} \tag{5}$$

集合 $A \in 2^X$ (つまり $A \subset X$) を以下のように定義する.

$$A = \left\{ f(U) \middle| U \in 2^X,\, f(U) \notin U \right\} \tag{6}$$

1. $f(A) \notin A$ の場合.
   A の定義より, $f(A)$ は A の元である条件を満たすので,
   $$f(A) \in A.$$
   したがって矛盾.

2. $f(A) \in A$ の場合.
   A の定義より, ある $U \in 2^X$ が存在し,
   $$f(A) = f(U), \quad \text{かつ} \quad f(U) \notin U.$$
   ここで, f は単射なので, $A = U$ より
   $$f(A) \notin A.$$
   したがって矛盾.

この証明は, カントールの対角線論法そのものであり, 有名な

$$\text{全単射} \quad f : \quad \mathbb{N} \to [0, 1] \quad \text{は存在しない}$$

のを示すための,「具体例で可視化された」カントールの対角線論法を一般化したものである. 以下では,

$$\text{全単射}\quad f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

が存在するとして, 上の一般の場合の証明が「具体例で可視化された」カントールの対角線論法に対応していることを見る (何かを証明しているわけでは全く無い. 関係性を見るだけである).

具体例として, f が以下のような写像であるとする ($i = f(U_i)$, $i \in \mathbb{N}$, $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$). 矢印の左側が $\mathbb{N}$ の元, 右側が $2^{\mathbb{N}}$ の元を表しており, 最右辺は, よくあるように, 各桁の数字が, その桁が $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$ に含まれていれば 1, 含まれていなければ 0 とする表記にしている:

$\mathbb{N}$ の元 (i)		$2^{\mathbb{N}}$ の元 (U_i)		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	$\cdots$
0	$\mapsfrom$	$U_0 = \{\quad 1, 2, \quad 4, \ldots\}$	$=$	0	1	1	0	1	$\cdots$
1	$\mapsfrom$	$U_1 = \{0, 1, \quad 3, 4, \ldots\}$	$=$	1	1	0	1	1	$\cdots$
2	$\mapsfrom$	$U_2 = \{0, \qquad 3, 4, \ldots\}$	$=$	1	0	0	1	1	$\cdots$
3	$\mapsfrom$	$U_3 = \{\quad 1, 2, \quad 4, \ldots\}$	$=$	0	1	1	0	1	$\cdots$
4	$\mapsfrom$	$U_4 = \{0, \quad 2, 3, 4, \ldots\}$	$=$	1	0	1	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

これに対して, 定義 (6) に従って定められる $A \in 2^{\mathbb{N}}$ は, 以下の左辺の $\mathbb{N}$ の元 $i = f(U_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ のうち, $i = f(U_i) \notin U_i$ を反映して, 0 が i 桁目に表示されている, 青文字のもののみをすべて含む集合である:

$\mathbb{N}$ の元 (i)		$2^{\mathbb{N}}$ の元 (U_i)		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	$\cdots$
0	$\mapsfrom$	$U_0 = \{\quad 1, 2, \quad 4, \ldots\}$	$=$	0	1	1	0	1	$\cdots$
1	$\mapsfrom$	$U_1 = \{0, 1, \quad 3, 4, \ldots\}$	$=$	1	1	0	1	1	$\cdots$
2	$\mapsfrom$	$U_2 = \{0, \qquad 3, 4, \ldots\}$	$=$	1	0	0	1	1	$\cdots$
3	$\mapsfrom$	$U_3 = \{\quad 1, 2, \quad 4, \ldots\}$	$=$	0	1	1	0	1	$\cdots$
4	$\mapsfrom$	$U_4 = \{0, \quad 2, 3, 4, \ldots\}$	$=$	1	0	1	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
		$A = \{0, \quad 2, 3, \quad \ldots\}$	$=$	1	0	1	1	0	$\cdots$
				$A \neq U_0$	$A \neq U_1$	$A \neq U_2$	$A \neq U_3$	$A \neq U_4$	$\cdots$
				$(\because 0 \in A)$	$(\because 1 \notin A)$	$(\because 2 \in A)$	$(\because 3 \in A)$	$(\because 4 \notin A)$	$\cdots$

よって, $A \in 2^{\mathbb{N}}$ であるにも関わらず, どの $i \in \mathbb{N}$ についても $A \neq U_i$ であり, 全単射 f が存在しないことが言えるわけだが, A を構成する際, まさに, 二進数表示における, 対角線上の偶奇 (ここでは 0 か 1 か) が異なる $[0, 1]$ 内の実数 (ここでは $2^{\mathbb{N}}$ の要素) を構築している事が, 視覚的にも, わかる. ただし, 本当に実数と対応付ける際は, これはもともとのよくある十進法での証明の例でもそうであるが, 少数表示は一意でない (例えば十進法では $1 = 0.999999\ldots$ とか, 二進法では $1 = 0.111111\ldots$) ことに注意しなければならない.